

GEOMETRÍA DINÁMICA

El significado de geometría dinámica lo podemos resumir diciendo que se trata de un programa con una serie de elementos u objetos elementales (puntos, segmentos, circunferencias, polígonos, etc.), a partir de los cuales es posible construir nuevos objetos, así como establecer relaciones entre ellos, de manera que al cambiar las condiciones de los objetos iniciales, se mantengan las relaciones existentes entre ellos, previamente establecidas a través de un conjunto de herramientas disponibles.

Con un programa de geometría dinámica se pueden construir distintos objetos de manera fácil y rápida, con un trazado exacto y real, que además, revelarán las relaciones existentes en la figura construida; además, permitirá la transformación de los objetos que la componen, actualizando las relaciones existentes con facilidad y rapidez.

Uno de estos programas, como es *GeoGebra*, fue desarrollado por *Markus Hohenwarter* para la enseñanza de la matemática escolar. El proyecto de Geogebra dió inicio en el 2001 en su tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria).

La utilización de un programa de geometría dinámica permitirá abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

GeoGebra es un programa sencillo y fácil de utilizar, lo que permitirá que, desde el primer instante, sea posible realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece.

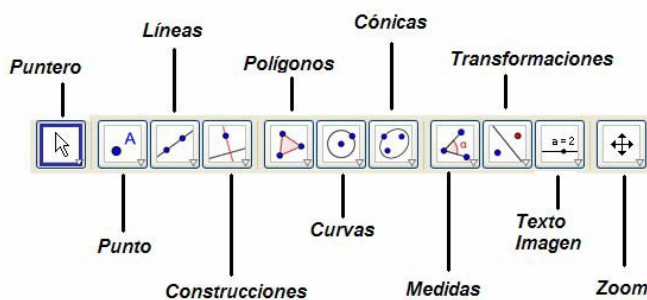
Primeras construcciones con Geogebra

Con *GeoGebra* cualquier construcción se realiza de manera análoga a como se haría utilizando herramientas tradicionales como son la regla y el compás, o con papel y lápiz.

Otra consideración que se debe tener en cuenta es que para utilizar un objeto, previamente se debe crear o señalar.

Por ejemplo, para crear puntos bastará con seleccionar la herramienta **Punto** en el bloque de herramientas del mismo nombre y pulsar el botón izquierdo del ratón sobre una zona libre de la ventana de trabajo o sobre un objeto ya existente; o también, como punto de intersección de dos objetos.

Algunas de las herramientas disponibles son:



Para conocer el significado de cada uno de los iconos, basta mantener el puntero del ratón sobre uno de ellos para que aparezca la información correspondiente a la acción que realiza.

Ejemplo 1

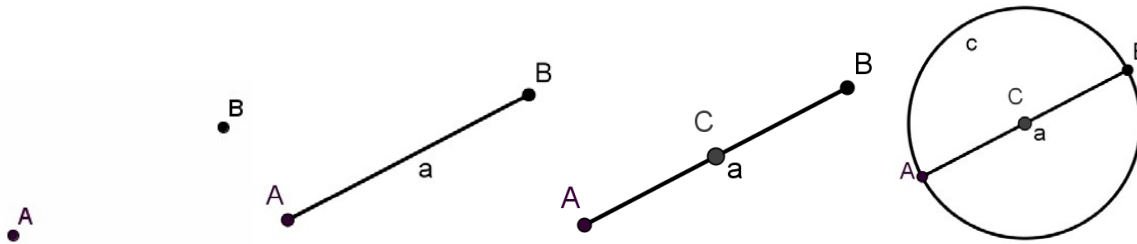
Dibujar la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une dos puntos, previamente dibujados.

Realizaremos el proceso siguiente:

- Dibujar los dos puntos utilizando la herramienta **Nuevo punto**.
- Seleccionamos **Segmento entre dos puntos** para construir el segmento que tiene estos puntos como extremos. Para señalar cada uno de los puntos, bastará con acercarse a un punto para pulsar (hacer un clic) el botón izquierdo del ratón, cuando el punto aparece resaltado.

- Acercarse al otro extremo, al mover el ratón se observa que aparece el segmento cuyo extremo queda fijado al pulsar de nuevo el ratón, cuando vuelva a aparecer resaltado el otro punto.
- Una vez dibujado el segmento que corresponde al diámetro de la circunferencia, se necesita el centro que será el punto medio. Utilizando la herramienta **Punto medio o centro** para señalar a continuación el segmento.
- Por último, seleccionar **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos** y señalar el punto correspondiente al centro y uno de los extremos del segmento.

La secuencia de las acciones realizadas aparece en las siguientes imágenes:



OBJETOS INDEPENDIENTES y DEPENDIENTES

Cuando se desea dibujar un objeto relacionado con otro existente en la construcción, el proceso será acercar el puntero al objeto y esperar a que aparezca resaltado, para indicarnos que estamos seleccionando dicho objeto.

Una de las características de los programas de geometría dinámica es que actualiza, de manera automática relaciones y medidas, es decir que se podrán arrastrar puntos, cambiar el tamaño o modificar la posición y se conservarán las relaciones existentes, siempre que la construcción esté bien realizada.

Todos los objetos se construyen a partir de uno o varios puntos que se pueden considerar como objetos básicos.

La dependencia e independencia de un objeto es un concepto importante como se ha visto anteriormente, sobre todo al utilizar la opción de arrastrar para cambiar las condiciones iniciales y experimentar en una construcción.

Los objetos independientes son los que se han creado utilizando puntos básicos, se podrán arrastrar para moverlos, aunque sólo cambiarán de posición, como ha ocurrido en el ejemplo anterior, al arrastrar el segmento, para cambiar el tamaño será necesario arrastrar los puntos básicos o los elementos iniciales sobre los que se han creado.

Los objetos dependientes son los creados utilizando objetos independientes, y por tanto se moverán y se actualizarán al modificar las condiciones de los objetos independientes.

En el ejemplo anterior, en la ventana algebraica se pueden observar los objetos independientes o libres (puntos *A* y *B*) y los objetos dependientes (punto medio *C*, radio *a* de la circunferencia y circunferencia *c*).

Ejemplo 2

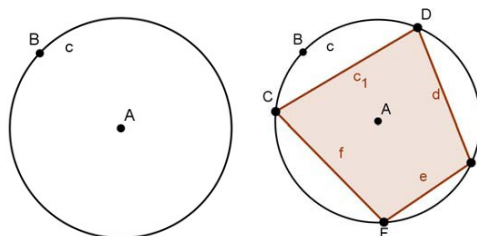
Dibujar un cuadrilátero cuyos vértices estén sobre una circunferencia.

Para iniciar una nueva construcción sobre una hoja de trabajo nueva, se utilizará la opción **Nuevo** del menú **Archivo**.

La secuencia de herramientas que se utilizará para realizar la construcción solicitada será la siguiente:

- Seleccionar **Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos**.
- Situar el cursor en una parte libre de la hoja de trabajo y al pulsar el botón izquierdo del ratón, se dibujará un punto que corresponde al centro de la circunferencia.
- Al desplazar el ratón aparecerá la circunferencia cuyo centro corresponde al punto dibujado anteriormente.
- Pulsar de nuevo el botón izquierdo del ratón para fijar la circunferencia, aparecerá un nuevo punto, lo que significa que se ha establecido el tamaño del radio y por tanto, la circunferencia queda determinada.
- Seleccionar la herramienta **Polígono** para marcar a continuación los cuatro vértices.
- Acercar el puntero a la circunferencia, aparecerá un nuevo punto representado por un pequeño círculo, pulsar el botón izquierdo del ratón para que aparezca el primer vértice del polígono.
- Repetir el paso anterior para crear los otros tres vértices.
- Hacer clic sobre el primer vértice para cerrar el polígono.

En las dos imágenes siguientes se podrá observar la construcción del cuadrilátero.



Una vez creado el polígono, se propone intentar modificar el tamaño y la posición de los distintos objetos para determinar cuáles son dependientes y cuáles independientes.

¿Qué ocurre al arrastrar el centro de la circunferencia?

¿Y si arrastramos la circunferencia?

Los objetos arrastrados hasta ahora, el centro y la circunferencia o radio son objetos dependientes.

¿Es posible mover el polígono?

Si se arrastra cualquiera de los vértices del polígono, el vértice se moverá sobre la circunferencia sobre la que se construyó y el polígono cambiará de forma.

Los puntos correspondientes a los vértices son objetos independientes y por tanto se podrán mover, aunque tienen limitada su independencia sobre el objeto circunferencia sobre el que se han creado.

En la barra de herramientas disponemos de distintas opciones para deshacer las últimas acciones realizadas. Estas opciones también están disponibles en el menú **Edita**.

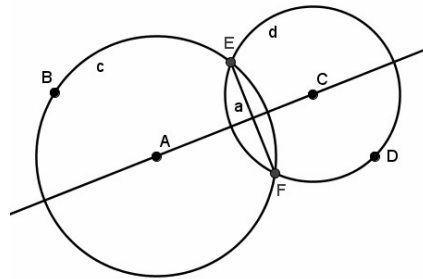
Ejemplo 3

Dibujar la mediatriz de la cuerda común a dos circunferencias secantes.

En primer lugar, con la herramienta **Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos** dibujamos dos circunferencias secantes, a continuación hay que dibujar la cuerda común.

La cuerda se puede dibujar utilizando la herramienta **Segmento**, señalando los puntos correspondientes, que previamente se deben obtener utilizando la herramienta **Intersección de dos objetos**.

Por último, para trazar la mediatriz, no es necesario dibujar previamente el punto medio de la cuerda, seleccionando a continuación la herramienta **Mediatriz** obtendremos la recta buscada.



GUARDAR UNA CONSTRUCCIÓN

Para guardar en el disco una construcción se utilizarán las opciones **Guarda** o **Guarda como** que se encuentran en el menú **Archivo**.

La opción **Abre**, de este mismo menú, permitirá leer una construcción para llevarla a la ventana de trabajo, para su estudio o para su modificación.

Para salir de *GeoGebra* utilizaremos la opción **Cierra**, que también se encuentra en el menú **Archivo**. Antes de salir, si no se ha guardado la construcción o las últimas modificaciones, solicitará la pertinente confirmación.

Ejemplo 4

Trazar la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.

Para resolver esta construcción hay que considerar la siguiente propiedad geométrica: *la recta tangente a una circunferencia c por un punto A de c , es perpendicular al radio trazado desde A .*

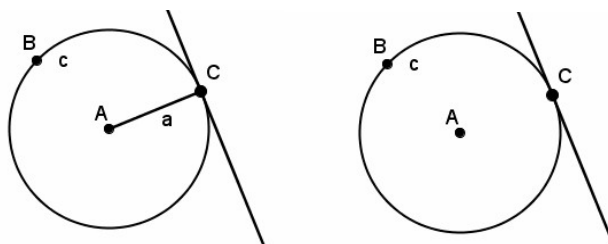
Antes de aplicar la propiedad anterior, dibujamos los elementos necesarios como son: la circunferencia, utilizando la herramienta **Circunferencia** y, un punto sobre la circunferencia con ayuda de la herramienta **Nuevo punto**.

Una vez dibujada la circunferencia y un nuevo punto C sobre ella, utilizaremos la herramienta **Segmento entre dos puntos** para dibujar el radio.

A continuación, con la herramienta **Recta perpendicular** trazaremos la recta perpendicular por el punto C al radio a .

Este proceso nos ayuda para trabajar conceptos, como es la perpendicularidad con respecto al radio de la recta tangente en un punto de la circunferencia, aunque para obtenerla disponemos de una herramienta para trazarla de manera directa.

Esta herramienta es **Tangentes**. Una vez marcado el punto C y la circunferencia obtendremos la recta tangente.

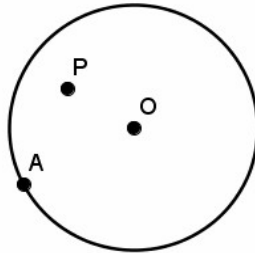


ACTIVIDADES PROPUESTAS

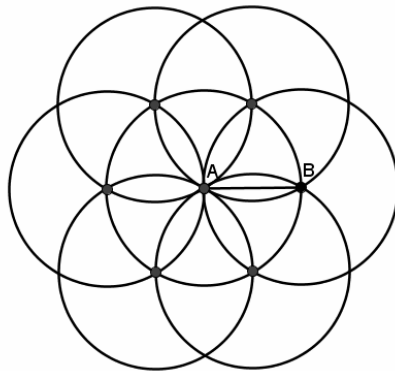
1. Dibujar un pentágono y trazar sus diagonales.
2. A partir de una circunferencia c y de un punto exterior A , trazar la circunferencia que tiene centro en el punto A y es tangente a la circunferencia c .
3. Dada una circunferencia de centro O , dibujar un triángulo equilátero cuyos vértices sean O y dos puntos de la circunferencia.
4. En un cuadrilátero de vértices $ABCD$,
 - a. Dibujar el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$.
 - b. Construir el cuadrilátero que tiene como puntos medios de sus lados los puntos A, B, C y D .
5. Determinar en la recta r un punto C tal, que el triángulo ABC sea isósceles en C . Encontrar otro punto D tal, que el triángulo ABD sea isósceles en A . ¿Son únicos estos puntos?



6. Dados dos puntos A y B , sea r una recta que no es perpendicular a la recta AB . Dibujar la circunferencia que pasa por los puntos A y B , y cuyo centro se encuentre en la recta r .
7. Sea A un punto de una circunferencia c con centro en O y P un punto interior. Trazar la circunferencia que pasa por el punto P y es tangente a la circunferencia c en el punto A .



8. Realizar la siguiente construcción a partir de un segmento AB .



9. En la figura anterior, dibujar el hexágono inscrito en la circunferencia de centro A y radio AB .
10. Trazar las rectas tangentes a una circunferencia c por un punto exterior P sin utilizar la herramienta **Tangente**. ¿Qué propiedad geométrica se aplica en la construcción?